

Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben per E-Mail bis Freitag, 13. November 2020, 10 Uhr

Leitfaden zu den Abgaben der Übungsaufgaben: siehe “Ankündigungen” im Moodle Kurs

1.S Von Abbildungen zum Würfeln. a) Wieviele Abbildungen von $\{1, 2, 3, 4\}$ nach $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ gibt es, für die die Bildmenge

(i) vier (ii) drei (iii) zwei

Elemente hat, bzw. (iv) einelementig ist ?

b) Wie wahrscheinlich ist es, beim 4-maligen gewöhnlichen Würfeln

(i) genau 4 (ii) genau 3 (iii) genau 2 (iv) keine zwei verschiedenen

Augenzahlen zu werfen?

2.S Was 6 recht ist, ist g billig. Für zwei natürliche Zahlen $f \leq g$ sei $p := f/g$ der Anteil der Menge $F := \{1, \dots, f\}$ an der Menge $G := \{1, \dots, g\}$. Es sei $S := \{(a_1, a_2, a_3, a_4) : a_i \in G\} = G^{\{1,2,3,4\}}$.

a) Wieviele Elemente in S gibt es, bei denen a_i in F liegt für genau zwei der vier Indizes $i = 1, 2, 3, 4$? Formulieren Sie die Antwort als Term in Abhängigkeit

(i) von f und g ,

(ii) von p und g .

b) Es sei $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ eine rein zufällige Wahl aus S . Wir interpretieren X als Werfen von 4 “Würfeln”, jeder mit den gleich wahrscheinlichen Augenzahlen $1, 2, \dots, g$. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei der geworfenen Augenzahlen $\leq f$ ausfallen?

c) Illustrieren Sie für $p = 0.195$ das Ergebnis aus b) mittels des im Moodle Kurs (unten im Ordner *Übungsblätter und Vorlesungsfolien*) bereitgestellten R-Programms *MonteCarlo.R*.¹ Betrachten Sie dazu ein Histogramm der Schätzwerte aus (z.B.) 1000 Wiederholungen des Zufallsexperiments. Wo finden Sie in diesem Histogramm einen empirischen Schätzwert für die in b) berechnete Wahrscheinlichkeit?

3. Monte-Carlo-Schätzung eines Flächenanteils über die Trefferquote. In der Vorlesung haben wir den Anteil p einer Teilfläche A an einer Gesamtfläche (“Quadrat”) S mit einem einfachen Monte-Carlo-Verfahren geschätzt: n Punkte wurden rein zufällig in S geworfen und der Anteil M der Treffer von A ermittelt. Die durch unabhängiges Wiederholen dieses Zufallsexperimentes ermittelte “empirische” Verteilung von M hat uns ein Bild von der Zuverlässigkeit der Schätzung vermittelt. Erkunden Sie (wieder für $p = 0.195$) mittels des R-Programms *MonteCarlo.R* (vgl. Aufgabe 2c)), wie sich die Genauigkeit der Schätzung verändert, wenn (i) $n = 50$ $n = 200$ (ii) $n = 800$ (iii) $n = 3200$ Punkte in die Menge S geworfen werden: Um welchen Faktor (circa) wird jeweils das Histogramm der Schätzwerte schmaler?

4. Approximationen für die Kollisionswahrscheinlichkeit. a) Welche Approximationen zu der in Aufgabe 1b (i) berechneten Wahrscheinlichkeit ergeben sich

(i) mittels der die Stirling-Näherung

(ii) über die Approximation durch Linearisierung von \exp ?

(Beide Näherungen werden in Vorlesung 1b besprochen.)

Welche der beiden Näherungen ist genauer?

b) Wo können Sie Ihr Ergebnis in einer Ausgabe des im Moodle Kurs (unten im Ordner *Übungsblätter und Vorlesungsfolien*) bereitgestellten Ferebee’schen R-Programms *Approximationen.R* finden? Ändern Sie dazu in diesem Programm die Einstellungen zu $g=6$ und $nn=1:5$.² Durch Drücken von “Enter” kommt man jeweils zum nächsten Schritt. Die R Konsole muss hierbei aktiviert sein (darauf klicken!).

Wenn R für Sie ganz neu ist: hier finden Sie eine kurze Anleitung:

<https://www.math.uni-frankfurt.de/~ismi/wakolbinger/teaching/StofI1920/Wandtner/index.html>

¹Das frei verfügbare statistische Programmpaket R bekommen Sie über www.r-project.org (zu finden auch über google \rightarrow R) auf Ihrem Rechner.

²Merci an Jan Lukas Igelbrink, der die automatische Anpassung der Grafikbeschriftung an die Änderung des Parameters g in die Version aus 19/20 einprogrammiert hat.